

O SURGIMENTO DAS TRIGONOMETRIAS PLANA E ESFÉRICA EM DIFERENTES CULTURAS

Everaldo Raiol da Silva - UFPA - raiolsilva@hotmail.com

Maria José de Freitas Mendes - UFPA - mjfm@ufpa.br

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo fazer um breve relato sobre o surgimento das trigonometrias plana e esférica em diferentes culturas, alicerçado na História da Matemática. No primeiro momento, mostramos como surgiram essas trigonometrias ao longo da história, nas civilizações: egípcia, babilônica, grega, hindu, árabe e chinesa. No segundo momento, evidenciamos as principais contribuições dos matemáticos que viveram nessas civilizações para o desenvolvimento e consolidação das trigonometrias plana e esférica, constituindo um legado que foi passado para as gerações posteriores. Nesta pesquisa, nossos principais referenciais teóricos são: Miguel e Miorim (2002), Morey (2003), Wussing (1998), Cajori (2007), Katz (2010), Brummelen (2009).

Palavras-chave: História da Matemática. História da Trigonometria. Trigonometria Plana. Trigonometria Esférica.

INTRODUÇÃO

O surgimento da matemática permitiu que as primeiras civilizações tornassem possível o desenvolvimento de aplicações concretas, tais como: o comércio, o manejo de plantações, a medição de terra, a observação e previsão de eventos astronômicos, a realização de rituais religiosos. Os estudos de estruturas matemáticas, como a Geometria e a Trigonometria, proporcionaram o crescimento, tanto econômico quanto cultural destas civilizações.

Desta forma, apresentamos um breve estudo histórico sobre o surgimento das trigonometrias plana e esférica nos primeiros povos da antiguidade, com o propósito de identificarmos quais as contribuições destes povos para o desenvolvimento e consolidação das referidas trigonometrias.

Investigamos, com auxílio da História da Matemática e da Ciência, como surgiram estas trigonometrias nas civilizações egípcia, babilônica, grega, hindu, árabe e chinesa, de tal maneira que pudéssemos estabelecer relações entre as produções destes povos e identificar as contribuições para a fundamentação das trigonometrias plana e esférica como campos de estudo da Matemática.

O embasamento da investigação histórica presente neste estudo segue os pressupostos teóricos de Miguel e Miorim (2002), os quais entendem este tipo de investigação como um campo do conhecimento ou conjunto cumulativo de ideias e resultados. Os autores incluem, nesta classificação, todos os estudos de natureza histórica que investigam as dimensões da atividade matemática na História, bem como as práticas sociais que participam ou participaram da produção do conhecimento matemático.

O resgate dos problemas da antiguidade permite, ao investigador, conhecer as indagações e as possíveis soluções propostas pela humanidade, as quais se constituíram diante da necessidade gerada por uma sociedade com uma determinada cultura.

O surgimento da Trigonometria nas Civilizações Egípcia e Babilônica

A História da Trigonometria não é obra de um só homem ou nação. Sua construção foi feita em milhares de anos e está presente em todas as grandes civilizações, porém, acreditamos que uma pergunta há muito tempo carece de resposta na História da Matemática: Como se deu a origem da Trigonometria?

A resposta a esta pergunta é carregada de dúvida, entretanto, pode-se afirmar que o início do desenvolvimento da Trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C, com os egípcios e babilônios.

Toda a informação obtida a respeito do conhecimento produzido pelos egípcios chegou até os dias atuais por meio dos papiros, principalmente de Rhind, que deixou, para a posteridade, o legado da Matemática e da Trigonometria egípcia. O desenvolvimento da Trigonometria levado a efeito pela civilização egípcia se deu, principalmente, a partir da agrimensura, devido às necessidades práticas de medição de áreas alagadas para plantio e na construção de pirâmides, que eram os objetivos principais da Trigonometria egípcia. Posterior aos egípcios, os babilônicos também contribuíram com a Trigonometria.

Investigar o desenvolvimento da Matemática babilônica só foi possível quando foram feitas as transcrições e interpretações das tábuas, que contêm as vastas aplicações da Matemática deste povo, como por exemplo, a utilização do sistema de base 60, o qual fortaleceu todo o desenvolvimento posterior da Matemática babilônica e de outras civilizações, além da criação das tabelas trigonométricas.

A Trigonometria na Civilização Grega

As contribuições dos gregos em Trigonometria começam na reelaboração e ressignificação dos conhecimentos oriundos dos egípcios e babilônicos, também na primeira definição do triângulo esférico, que aparece no trabalho de Menelau de Alexandria, porém, a mais importante contribuição foi a obra *Almagesto*, de Cláudio Ptolomeu, o mais importante tratado da Trigonometria da antiguidade.

Essa obra é uma sintaxe de todo conhecimento em Astronomia até esse período histórico e contém uma boa base da Trigonometria plana e esférica utilizada, até então, a serviço da astronomia. Outro marco significativo foi o Teorema de Menelau que será a própria Trigonometria esférica, por alguns

séculos, e a contribuição dos gregos em Trigonometria serviu de sustentação posterior neste campo de conhecimento.

A Trigonometria na Civilização Hindu

É de amplo conhecimento pelos historiadores da Matemática que a contribuição mais importante da Trigonometria Indiana foi a introdução da função seno na sua forma moderna, porém, outro ponto relevante foi a apresentação da função senoverso ou seno versado, que deu um novo impulso nos problemas de Astronomia de Posição aplicada à Navegação Astronômica.

Com a transformação da função senoverso, séculos depois, na função semisenoverso utilizado para navegação, os cálculos aplicados ao triângulo de posição, foram modernizados e melhorados, pela transformação de todas as fórmulas da Trigonometria esférica para a utilização da função semisenoverso, e, no século XIX, também pela criação de John William Norie (1772–1843) da tábua trigonométrica chamada de Tábua Norie (ou Noire).

Esta tábua era aplicada à Navegação Astronômica e se constituía, na realidade, em uma série de soluções pré-computadas de triângulos esféricos para todas as combinações possíveis de Latitude, Declinação e Ângulos Horários (ou ângulo no polo), a fim de facilitar, ao navegante, a resolução do triângulo de posição e a determinação rápida e precisa do ponto no mar (Azimute de Saída e Azimute de Chegada), aplicada aos cálculos de Navegação, com valores logaritmos de todas as funções trigonométricas e também para função semisenoverso que será bastante utilizada por navegadores em todo mundo.

A Trigonometria Árabe

Os Astrônomos/Matemáticos islâmicos tinham grande interesse em usar a Trigonometria para resolver os triângulos esféricos, pelas aplicações nos cálculos em Astronomia e, também, porque, de acordo com a Lei Islâmica, os muçulmanos deviam se voltar para Meca, quando faziam suas rezas cinco vezes durante o dia. A necessidade de descobrir a direção de Meca foi, de fato, a mola propulsora para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento da Trigonometria plana e esférica pelos árabes.

A solução, tanto de triângulos planos como esféricos, era também importante na determinação dos tempos corretos para as orações. Esses tempos eram definidos em relação ao início e o final do dia, assim como a duração da luz do dia e da altitude do Sol num dado dia. Para dar cabo a tais problemas, exigiam-se elaborados cálculos aplicados da Trigonometria esférica.

A importância da Civilização Árabe foi preservar o conhecimento da antiguidade, porém, além disso, acrescentaram e melhoraram os conceitos e métodos, em Trigonometria, apresentaram tratados que culminaram com a separação da Trigonometria da Astronomia. O primeiro desses tratados foi “Kitab Mayhulat qisi al-kura”, “Determinação das magnitudes dos arcos na superfície de uma esfera”, publicado por volta de 1060, por Al-Jayyani (989–1079), cujo objetivo principal foi apresentar métodos para a resolução de todos os casos de

triângulos esféricos: qualquer e retângulo, sendo conhecidos quatro dos seis elementos do triângulo, tratando a Trigonometria separada da Astronomia no Ocidente Medieval.

Outro tratado que também contribuiu para separação da Trigonometria da Astronomia foi “Kitab al shakl al-qita”, (Tratado sobre Figuras Transversais), conhecido também pelo nome “Tratado sobre quadrilátero completo” de 1260, de Nasir Eddin al-Tusi (1201–1274), e o primeiro a tratar a Trigonometria separada da Astronomia no Oriente Medieval.

A primeira obra que fez a separação da Trigonometria da Astronomia causou certa controvérsia para alguns historiadores da Matemática; pesquisas recentes consideram a obra “Determinação das magnitudes dos arcos na superfície de uma esfera”, de Al-Jayyani, como marco inicial dessa separação no Medievo¹ Ocidental; neste sentido, Brummelen (2009) considera essa obra como o primeiro tratado sobre Trigonometria esférica, apresentada em sua forma moderna, no Ocidente Medieval. Além de traduções de suas obras, a partir do árabe, seu trabalho influenciou Regiomontanus e alguns matemáticos europeus. Porém, outros autores como Wussing (1998), Cajori (2007) e Katz (2010) consideram a obra de Al-Tusi intitulada “Tratado sobre quadrilátero completo” publicada em 1260, sendo a primeira obra a tratar Trigonometria plana e esférica como assunto separado da Astronomia no Oriente Medieval e, como consequência, criando uma disciplina discreta tal qual temos na atualidade. Neste sentido existe uma dualidade de interpretação para definir qual foi a primeira obra de fato a tratar a Trigonometria independente da Astronomia no Medievo.

A Trigonometria Chinesa

A Matemática chinesa era essencialmente prática, de cunho utilitário, motivada por problemas de calendário, observação celeste, registros governamentais, impostos, mensuração agrária, comércio. Neste sentido, pouco diferia da Matemática prática dos babilônicos e dos egípcios. O primeiro documento matemático desse povo, que data de aproximadamente mil anos a.C.. O “Chou Pei Suang Shing” (Calendário das Horas Solares), um pergaminho de dois metros e trinta, aborda diversos assuntos científicos sob a forma de diálogos entre o imperador e um de seus ministros.

Uma Trigonometria primitiva foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo, mas, infelizmente não ficaram registros de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

Existem várias matemáticas incluídas em alguns livros de calendário. A mais importante é de trigonometria plana e esférica e as tabelas que são requeridas para tais matemáticas.

Na China, chegou uma multiplicidade de fórmulas da Trigonometria esférica, pelos trabalhos de Jen Mikollaj

¹Medievo: É um termo criado para referir-se ao modo como os renascentistas chamavam a era medieval, e significa medie (do latim)-medíocre, evo-era. Uma era medíocre (medíocre) na referência à Idade Média. É um período da história da Europa que se inicia com a Queda do Império Romano do Ocidente em 476 e estendeu-se até 1453, com a queda do Império Romano do Oriente pela tomada de Constantinopla pelos turcos, fato esse que marca transição para a Idade Moderna é também o período intermédio da divisão clássica da História Ocidental descrita em três períodos: a Antiguidade, Idade Média, sendo frequentemente dividido em Alta e Baixa Idade Média e Idade Moderna. Divalte (2002).

Smogulecki (1610–1656) e Xue Fèngzuò (1600–1680), os quais implementaram métodos para calcular os lados e ângulos de triângulos usando logaritmos; assim, eles introduziram os logaritmos nas funções trigonométricas e também métodos gerais para vários tipos de cálculo trigonométricos logarítmicos. Por exemplo, a regra do seno,

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{a} = \frac{\text{sen}(\hat{B})}{b}$$

, fica transformada usando logaritmo,

$$\text{Log } b = \text{Log } a + \text{Log } \text{sen}(\hat{B}) - \text{Log } \text{sen}(\hat{A})$$

Na China, os “logaritmos” eram chamados de “números correspondentes” (Bi lishù) ou números poderosos (jia shù).

Em Trigonometria, os Chineses fizeram contribuições na construção de tabela de tangente. Em várias obras, trabalharam com a Trigonometria Plana para aplicação na Engenharia em geral, com a Trigonometria Esférica, para o calendário e Astronomia, e com o advento da visita dos jesuítas na China, outras obras clássicas dos gregos, árabes e hindus foram traduzidas para o chinês. Posteriormente, os próprios chineses fizeram o aperfeiçoamento na Trigonometria existente.

A Trigonometria na Europa

No Renascimento europeu, entre os séculos XV e XVI, Georg von Peurbach (1423 –1461) incumbiu, ao seu aluno Regiomontanus, compilar e ordenar todos os teoremas dispersos nos textos clássicos, islâmicos e europeus e todas as tabelas trigonométricas, importante para os cálculos astronômicos; estes estudos iniciaram em 1464 e, deste trabalho surgiu, então, a obra definitiva que transforma a Trigonometria como ciência independente na Europa “De Triangulis Onunímodis Libri Quinque” (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos). Esta obra reuniu a Trigonometria Plana e Esférica conhecida, até o momento, em cinco livros independentes da Astronomia e publicados, postumamente, em 1533, passando a ser a obra de referência dos matemáticos posteriores, sendo o marco definitivo da separação da Trigonometria da Astronomia, e servindo de apoio a todas as pesquisas em Trigonometria feitas a partir de então.

No período Renascentista, a obra de Regiomontanus, “De Triangulis Onunímodis Libri Quinque”, forneceu uma base sólida em Trigonometria Plana e Esférica, para fins astronômicos na Europa e serviu de base para todos os avanços da Trigonometria posterior, tanto que a invenção dos logaritmos tornou os cálculos astronômicos mais simples.

DISCUSSÕES FINAIS

É consenso que a Matemática está presente em nosso cotidiano, em situações simples ou complexas, portanto, para compreendermos seu significado perante a sociedade, é relevante resgatar o sentido lógico dos conceitos desenvolvidos no passado, através de um estudo histórico voltado para as necessidades sociais e culturais envolvidas na evolução do conhecimento matemático.

Recorremos, Inicialmente, aos primórdios da Trigonometria (Plana e Esférica), com o auxílio da História da Matemática e da

Ciência para evidenciarmos as transformações de compreensão conceitual, sofridas ao longo do tempo, nas diferentes civilizações, desde seu surgimento com os povos que viveram na Antiguidade, tais como: Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Árabes e Chineses; destacamos, também, o nascimento da Trigonometria como ciência auxiliar da Astronomia e como se tornou independente na Europa.

A importância da Trigonometria na atualidade consiste em ser uma ferramenta bastante poderosa e é usada em muitas áreas do saber. Temos inúmeras aplicações do seu uso nos mais modernos instrumentos tecnológicos de medida, bem como em ciências de Cartografia, Sistemas de Informação Geográfica, Biologia, Geologia e até mesmo na Economia, para obtenção de resultados nos mais variados problemas, além de inúmeras aplicações na Física, nas Engenharias.

Na atualidade, a Trigonometria Esférica faz parte de poucas matrizes curriculares de Curso de Licenciatura em matemática, sendo objeto de estudo apenas de alguns cursos de graduação, como por exemplo, Astronomia, Ciências Geodésicas, Engenharia: Cartográfica, de Agrimensura, Aeronáutica e cursos de formação para Oficial da Marinha de Guerra e Mercante.

Encontramos fragmentos de conceitos de Trigonometria Esférica em outras disciplinas, como em Geometria não-Euclidianas, no Cálculo Diferencial e Integral aplicados a problemas de Astronomia, Geodesia Geométrica, e, por tudo isso, ressaltamos e reafirmamos a necessidade dos cursos de Graduação em Matemática resgatarem e incluam o conteúdo de Trigonometria esférica nas suas matrizes curriculares.

REFERÊNCIAS

- BRUMMELEN, Glen Van. The mathematics of the heavens and the earth: The Early History of Trigonometry. New Jersey: Princeton University, 2009.
- CAJORI, Florian. Uma História da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.
- DIVALTE Garcia Figueira. História (volume único). São Paulo: Ática, 2002.
- H. Wussing, Lecciones de Historia de las Matemáticas, Siglo XXI de España Editores, S.A 1998.
- KATZ, Victor J. História da Matemática. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- MIGUEL, A; MIORIM, M. A. História da Matemática: uma prática de investigação em construção. Educação em Revista, Belo Horizonte nº 36, dez. 2002 p 177-203.
- MIGUEL, A; MIORIM, M. A. História na Educação Matemática: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: autentica editora, 2011. 208 p.
- VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação. 2007.